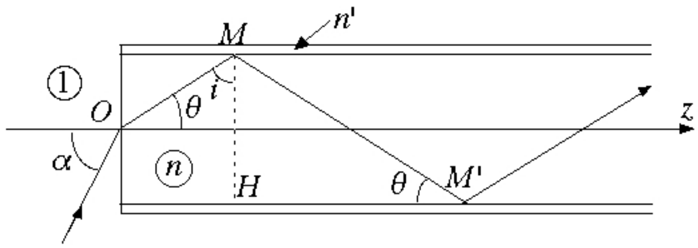
Fibre optique.

On étudie ici la propagation de la lumière dans un cylindre de longueur finie $L = 1\,\text{km}$ et de diamètre $a = 1\,\text{mm}$ en verre d'indice $n = 1,50$ et entouré (on dit gainé) par une couche d'un verre de composition différente et d'indice $n' = 1,49$. Pour alléger l'étude, on ne s'intéresse qu'aux rayons contenus dans un plan méridien. Un rayon pénêtre en O, centre de la face circulaire d'entrée, dans une direction faisant avec l'axe Oz l'angle θ (côté verre). Le rayon arrive ensuite en un point M au contact de la gaine.



Question 1 :

On suppose ici θ de l'ordre de 45 $^\circ$. Donner l'allure de la propagation du rayon dans la fibre. Combien de réflexions successives le rayon subit-il pour traverser toute la fibre ? En supposant qu'en M le coefficient de réflexion énergétique soit élevé mais strictement inférieur à 1 (disons 0,99), quelle proportion de l'énergie initiale ressort de la fibre ?

De par les lois de Snell-Descartes, le rayon est une succession de segments comme MM' faisant avec Oz l'angle θ alternativement vers le haut et vers le bas. Entre deux réflexions, le rayon progresse, en projection sur Oz de $z_{M'} - z_M = HM'$, c'est-à-dire puisque le triangle MHM' est approximativement rectangle isocèle de a. Le nombre de réflexions est donc $N = L/a \approx 10^6$. La fraction d'énergie ressortant au bout de la fibre est donc $R = 0,99^{10^6}$. Pour éviter de planter la calculatrice, passons aux logarithmes.

$$\ln R = 10^6\ \ln(0,99) = -1,005\,10^4 \approx -10^4$$

$$\log_{10} R = \frac{\ln R}{\ln 10} = -4,36\,10^3$$

$$R = 10^{-4360}\ !!!$$

Il est raisonnable d'affirmer qu'il ne ressort RIEN de la fibre.

Question 2 :

A quelle condition sur θ le rayon subit-il une réflexion totale en M ? Quel en est l'intérêt ? Quelle est la valeur de l'angle limite θ_m qui apparaît ?

En l'absence de réflexion totale, le rayon en M donne naissance à un réfracté faisant avec la normale au cylindre un angle r tel que

$$n'\ \sin r = n\ \sin i = n\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = n\ \cos\theta$$

et il y a reflexion totale dès que cette formule conduit à un $\sin r$ supérieur à 1, soit pour

$$\cos\theta > \frac{n'}{n} \qquad \text{soit} \qquad \theta < \theta_m = \arccos\left(\frac{n'}{n}\right)$$

L'application numérique donne θ_m de l'ordre de 7°. Bien sûr, si la réflexion est totale en M elle l'est partout ensuite et l'intégralité de l'énergie reste dans la fibre et s'y propage jusque la sortie.

Question 3 :

Quel est, en fonction de L et θ, le chemin optique D parcouru par le rayon entre l'entrée et la sortie de la fibre ? Quelles en sont les valeurs extrêmes pour θ variant entre 0 et θ_m ?

Entre deux réflexions successives, par exemple entre M et M', le chemin optique élémentaire est

$$d = [MM'] = n\,MM' = \frac{n\,HM'}{\cos\theta}$$

et en raisonnant comme plus haut, le nombre de réflexions ou de segments successifs est

$$N = \frac{L}{HM'}$$

et le chemin optique total est donc

$$D(\theta) = N\,d = \frac{n\,L}{\cos\theta}$$

Ses valeurs extrêmes sont obtenues pour $\theta = 0$ et $\theta = \theta_m$ au delà duquel il n'y a plus propagation jusque la sortie, soit

$$D_{min} = \frac{n\,L}{\cos(0)} = n\,L$$

$$D_{max} = \frac{n\,L}{\cos\theta_m} = \frac{n\,L}{\frac{n'}{n}} = \frac{n^2\,L}{n'}$$

Question 4 :

Un signal très bref, véhiculé par un flash de lumière, entre dans la fibre dans toutes les directions. Montrer qu'il en ressort étalé sur une durée τ que l'on exprimera en fonction de L, c (vitesse de la lumière dans le vide), n et n'.

Selon la direction qu'elle a prise, la lumière du flash met pour traverser la fibre un temps t variant entre $t_{min} = D_{min}/c$ et $t_{max} = D_{max}/c$. Il en résulte un étalement temporel de

$$\tau = t_{max} - t_{min} = \frac{n^2\,L}{n'\,c} - \frac{n\,L}{c} = \frac{n\,(n-n')\,L}{n'\,c}$$

L'application numérique donne $\tau = 33,6\,\mathrm{ns}$

Question 5 :

Une transmission de données binaires se fait en envoyant des signaux très brefs espacés dans le temps d'une durée T et l'on appelle $f = 1/T$ débit «binaire». Calculer le débit binaire maximal supporté par la fibre. Faire l'application numérique avec les données précédentes.

Si au départ les flashs sont séparés de T et que chacun s'élargit de τ, ils déborderont les uns sur les autres dès que $\tau > T$ et la lecture du message sera rendue impossible. Il faut donc que $T > \tau$ d'où

$$f = \frac{1}{T} < f_{max} = \frac{1}{\tau}$$

L'application numérique donne $f_{max} \approx 30\,\mathrm{MHz}$

Question 6 :

La fibre convient-elle pour une transmission musicale «échantillonnée» à 40 kHz et codée sur 256 valeurs (par un octet donc) ? Et pour une retransmission télévisée noir et blanc à 25 images par seconde, de 625 lignes de 800 pixels codés sur 256 valeurs ?

On comprend que 40 000 fois par seconde on envoie une valeur traduite par un nombre compris entre 0 (en binaire 00000000) et 255 (en binaire 11111111) soit les 8 bits de ce nombre. La fréquence ou débit binaire est donc $8 \times 40\,000 = 320\,\mathrm{kHz}$ largement inféreur à f_{max}. On peut donc véhiculer la première symphonie de Gustav Malher dite symphonie Titan.

Remarque hors programme : le théorème de Shannon affirme que toutes les fréquences contenues dans le signal et inférieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage soit 20 kHz sont reproduites sans déformation et c'est justement la limite des sons audibles par l'homme.

Pour l'émission télévisée noir et blanc, le débit binaire est $25 \times 625 \times 800 \times 8 = 100\,\mathrm{MHz}$ et la fibre est donc débordée.

Remarquons au passage qu'un image contient beaucoup plus d'informations qu'un extrait sonore. Tirez-en les conclusions qui s'imposent : FAITES DES FIGURES DANS VOS COPIES !

Question 7 :

On fabrique maintenant des fibres à gradient d'indice dont l'indice décroît avec la distance à l'axe. Expliquer qualitativement et sans calculs en quoi ces fibres ont un bien meilleur débit maximal.

Quand θ augmente, le rayon s'écarte de l'axe et parcourt une distance géométrique plus grande. On essaie de compenser ce défaut en lui communiquant alors une vitesse plus grande que sur l'axe et pour cela on diminue l'indice. On diminue ainsi τ et augmente f_{max} et ce n'est pas plus compliqué que cela.